Topologie Algébrique TD 7

16 Décembre 2011

7 Homologie

Exercice 7.1 Calculer les homologies (à coefficient dans $\mathbf{Z}$) des espaces topologiques suivants :

1. Une partie convexe dans un espace vectoriel réel.
2. $\mathbb{S}^n$, la sphère de dimension n.
3. Un graphe fini connexe.
4. La surface compacte orientable de genre g.
5. La bouteille de Klein.
6. $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$, l'espace projectif complexe de dimension n.
7. $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$, l'espace projectif réel de dimension n.
8. $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n}$, le tore topologique de dimension n.

Indications:

1. Il est contractile, donc les homologies sont triviales sauf $H^0 = \mathbf{Z}$.

2. $H_0(\mathbb{S}^n) = \mathbf{Z}$, $H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbf{Z}$, les autres groupes d'homologie sont nuls.

3. $H_0 = \mathbf{Z}$, $H^1 = \mathbf{Z}^{\oplus(e-v+1)}$, où v est le nombre des sommets, et e est le nombre des arêtes.

4. $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus 2g}$, $H_2 = \mathbf{Z}$.

5. $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $H_2 = 0$.

6. $H_{2i} = \mathbf{Z}$ pour $0 \leq i \leq n$, les autres groupes d'homologie sont nuls.

7. $H_0 = \mathbf{Z}$; $H_n = 0$ si n est paire, $H_n = \mathbf{Z}$ si n est impair ; $H_i = 0$, si $i < 0$ ou $i > n$. Pour $0 < i < n$, $H_i = 0$ si i est pair, $H_i = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ si i est impair.

8. $H_i = \mathbf{Z}^{\oplus \binom{n}{i}}$.

Exercice 7.2 (Caractéristique d'Euler) Soit X un espace topologique de *dimension homologique finie* (*i.e.* $H_i(X, \mathbf{R}) = 0$ pour i assez grand), et on suppose de plus que pour chaque degré i, son *nombre de Betti* de degré i est fini, c'est-à-dire, $b_i(X) := \dim_{\mathbf{R}} H_i(X, \mathbf{R}) < \infty$. Par exemple, les CW-complexes finis vérifient ces deux propriétés. On définit la *caractéristique d'Euler* de X par la somme alternée (finie) de ses nombres de Betti :

$$\chi(X) := \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i b_i$$

.

1. **(Interprétation cellulaire)** Soit X un CW-complexe fini de dimension n, pour $0 \leq i \leq n$, on note a_i le nombre de cellules de dimension i. Montrer que les sommes alternées des a_i et des b_i sont égales :

   $$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i = \chi(X).$$

   En particulier, $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i$ ne dépend que du type d'homotopie de l'espace, et ne dépend pas de la structure cellulaire.
2. **(Multiplicativité)** Soient X, Y deux CW-complexes finis, montrer que

   $$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

3. **(Additivité)** Soit X un CW-complexe fini, qui est l'union de deux sous-complexes A et B, montrer que

   $$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

4. **(Revêtements)** Soit $p : X \to Y$ un revêtement à d feuilles, où Y est un CW-complexe fini, montrer que

   $$\chi(X) = d \cdot \chi(Y).$$

5. **(Quotients)** Soit X un CW-complexe fini, A un sous-complexe fini de X. Montrer que

   $$\chi(X/A) = \chi(X) - \chi(A) + 1.$$

6. **(Mutiplicativité raffinée)** Soit $p : E \to B$ un fibré en fibre F, c'est-à-dire, localement en B, p est un produit de la base et la fibre F. On suppose que B, F ainsi E admettent des structures de CW-complexe finis. Montrer que

   $$\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F).$$

7. Calculer la caractéristique d'Euler des espaces topologiques suivants :
   (a) Surface compacte orientable de genre g ;
   (b) Espace projectif réel de dimension n ;
   (c) Montrer que la caractéristique d'Euler d'un graphe fini planaire est égale à $2 - r$, où r est le nombre de régions qu'il sépare le plan.
   (d) Un tore topologique de dimension n.
   (e) Le groupe orthogonal spécial $\mathrm{SO}(n)$ pour $n \geq 2$.

Indications:

1. L'égalité vient du fait général que la somme alternée des dimension des termes dans un complexe fini est égale à la somme alternée des dimension des homologies de ce complexe. Pour démontrer ce fait général, il suffit de casser un complexe en plusieurs suite exactes courtes.

2, 3, 4 et 5 sont évidents en utilisant l'interprétation de 1 par un compte élémentaire des nombres de cellules. Il est quand même intéressant de les résoudre à partir de la définition homologique de caractéristique d'Euler :

2 découle de la formule de Künneth ; 3 est une conséquence de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, qui est essentiellement l'axiome d'excision ; 4 est un cas particulier de 6, voir l'explication ci-dessous. 5 peut se ramener à 2 grâce à l'équivalence d'homotopie $X/A \sim X \cup_A CA$.

6 est une conséquence de 2 et 3 en raffinant la structure de CW-complexe de la base de la sorte que chaque cellule est complètement contenue dans un ouvert de trivialisation du fibré. Et pour la démonstration cohomologique, on remarque que 6 est une conséquence de la suite spectrale de Serre (ou plutôt de Leray) plus le fait que la caractéristique d'Euler de la cohomologie d'un faisceau est insensible à un twist par un système local.

7(a). On pourrait calculer explicitement les groupes d'homologie, ou on fait une récurrence : d'abord, pour le tore, $\chi(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1) = \chi(\mathbb{S}^1)^2 = 0$ par la multiplicité. En suite, pour passer de M_g à M_{g+1}, on fait une somme connexe avec un tore, donc par l'additivité on obtient

$$\chi(M_{g+1}) = (\chi(M_g) - \chi(\mathbb{D}^2)) + (\chi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) - \chi(\mathbb{D}^2)) = \chi(M_g) - 2.$$

D'où, on conclut que $\chi(M_g) = 2 - 2g$.

(b). Grâce au revêtement $\mathbb{S}^n \to \mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$, on obtient, par 4,

$$2\chi(\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}) = \chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n.$$

(c). On voit un graphe planaire comme un graphe dans la sphère $\mathbb{S}^2$. On conclut par l'additivité plus le fait que $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$.

(d). Par la multiplicativité, c'est zéro.

(e). Tous sont 0. On fait le raisonnement par récurrence : d'abord, $\mathrm{SO}(2)$ est cercle. En suite, on fait agir $\mathrm{SO}(n+1)$ transitivement sur la sphère $\mathbb{S}^n$ avec le stabilisateur d'un point $\mathrm{SO}(n)$. On obtient un fibré $\mathrm{SO}(n+1) \to \mathbb{S}^n$ de fibre $\mathrm{SO}(n)$. Par la multiplicativité raffinée, on a

$$\chi(\mathrm{SO}(n+1)) = \chi(\mathbb{S}^n) \cdot \chi(\mathrm{SO}(n)).$$

On remarque que la caractéristique d'Euler d'un groupe de Lie connexe est toujours nulle. En fait, la caractéristique d'Euler d'une varété orientable coïncide à l'intégral de classe d'Euler de son fibré tangent, mais le fibré tangent d'un groupe de Lie est trivial.

Exercice 7.3 (Actions libres sur une sphère) Si on se donne un groupe fini agissant librement et proprement discontinument sur une sphère de dimension paire. Montrer que le groupe est trivial ou isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Indications:

L'hypothèse nous donne un revêtement dont le nombre de feuilles est égal à l'ordre du groupe. Puisque la caractéristique d'Euler du revêtement (qui est $\chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n = 2$) est la caractéristique d'Euler de la base multiplié par le nombre de feuilles. Donc l'ordre du groupe est 1 ou 2.

Exercice 7.4 (Inégalités de Morse) Soit X un CW-complexe fini de dimension n, pour $0 \leq i \leq n$, on note a_i le nombre de cellule de dimension i, et b_i le *nombre de Betti* de degré i, c'est-à-dire : $b_i := \dim_{\mathbf{R}} H_i(X, \mathbf{R})$.

1. Montrer la première série des inégalités de Morse :

$$a_i \geq b_i$$

pour $0 \leq i \leq n$

2. Montrer la deuxième série des inégalités de Morse :

$$a_0 \geq b_0;$$

$$a_1 - a_0 \geq b_1 - b_0;$$

$$\vdots$$

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} \cdots + (-1)^n a_0 \geq b_n - b_{n-1} + b_{n-2} \cdots + (-1)^n b_0.$$

En fait, la dernière est une égalité qui donne la caractéristique d'Euler.

3. Si on suppose que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $a_i a_{i+1} = 0$, montrer que $a_i = b_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$.
4. Considérer les homologies à coefficients dans un corps de caractéristique non nulle, par exemple $\mathbf{F}_p$ avec p un entier premier. Définir les *p-nombres de Betti*, énoncer et démontrer les inégalités de Morse analogues. On remarque que les inégalités ainsi obtenues peuvent être plus fortes que les inégalités usuelles.

Indications:

1. Notons que le groupe d'homologie de degré i (qui est de dimension b_i) est un sous-quotient du groupe de chaine en degré i (qui est de dimension a_i).

2. En cassant le complexe de chaine en plusieurs suite exactes courtes, on trouve plus exactement que la différence de la terme à gauche et la terme à droite dans la $i^{\text{ème}}$ inégalité est la dimension du conoyau de d_{i+1}.

3. C'est une conséquence immédiate de 2.

4. On définit ${}_pb_i$ le *p-nombre de Betti* de degré i, c'est-à-dire : ${}_pb_i := \mathbf{dim}_{\mathbf{F}_p} H_i(X, \mathbf{F}_p)$. Par le même argument, on a la première série des inégalités de Morse :

$$a_i \geq {}_pb_i$$

pour $0 \leq i \leq n$, et aussi la deuxième série des inégalités de Morse :

$$a_0 \geq {}_pb_0;$$

$$a_1 - a_0 \geq {}_pb_1 - {}_pb_0;$$

$$\vdots$$

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} \cdots + (-1)^n a_0 \geq {}_pb_n - {}_pb_{n-1} + {}_pb_{n-2} \cdots + (-1)^n {}_pb_0.$$

Et la dernière est en fait une égalité qui donne la caractéristique d'Euler. En particulier, la caractéristique d'Euler est indépendante du choix de coefficients.

Exercice 7.5 (Tore et sphère) On munit $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ du point de base 1 et on note $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ le bouquet de 2 copies deux cercles.

1. Montrer que le quotient topologique $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 / (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$. On notera p l'application induite $p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 / (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{S}^2$.
2. Montrer que l'application p n'est pas homotope à une application constante.
3. Montrer que toute application continue $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ est homotope à une application constante.

Indications:

2. Parce que le morphisme induit sur les homologies de degré deux est non-nul.

3. Puisque $\mathbb{S}^2$ est simplement connexe, on sait que tout morphisme de $\mathbb{S}^2$ vers $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ se factorise à travers le revêtement universel $\mathbf{R}^2$, qui est contractile.

Exercice 7.6 (Degrés) Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application continue.

1. Si f est *paire*, *i.e.* $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$, montrer que le degré de f est pair.
2. Si f est *impaire*, *i.e.* $f(x) = -f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$, montrer que le degré de f est impair.

Indications:

1. Si f est paire, alors elle se factorise à travers l'application quotient pour la relation d'équivalence antipodale $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$, nous fournissant une application

$\overline{f} : \mathbf{P}^n_{\mathbf{R}} \to \mathbb{S}^n$. On regarde la composition au niveau d'homologie de degré maximal :

$$f_* = \deg(f) : H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\pi_*} H_n(\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{\overline{f}_*} H_n(\mathbb{S}^n).$$

On note que le morphisme π_* est $\mathbf{Z} \xrightarrow{0} 0$ si n est pair, $\mathbf{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbf{Z}$ si n est impair. Donc on obtient un résultat un peu plus fin que l'énoncé :
Si n est pair, $\deg(f) = 0$, si n est impair, $\deg(f)$ est pair.

2. Un peu plus difficile. Voir A.Hatcher, *Algebraic Topology* Page 174.

Exercice 7.7 (Borsuk-Ulam) Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbf{R}^n$ une application continue, montrer qu'il existe un point $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Indications:

Comme dans la preuve pour le cas $n = 2$, on raisonne par l'absurde : on considère $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ définie par $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$. En restreignant g sur un grand $\mathbb{S}^{n-1}$ on obtient un endomorphisme impair de $\mathbb{S}^{n-1}$, qui est homotope à zéro par construction, et on déduit une contradiction par l'exercice précédent.

Exercice 7.8 ("Jambon Sandwich") On munit la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$, l'espace vectoriel réel de dimension n. Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sous-ensembles mesurables de mesures finies dans $\mathbf{R}^n$, montrer qu'il existe une hyperplan qui coupe chaque A_i en deux parties de même mesure. (En dimension 3, pourquoi le titre "Jambon Sandwich"?)

Indications:

On voit R^n comme un sous-espace affine ne passant pas par l'origine dans un R^{n+1}, alors pour un élément v de la sphère unité $\mathbb{S}^n$ correspond à un hyperplan orienté de dimension n, qui coupe chaque A_i en deux parties, on note $f_i(v)$ la mesure de la partie de la même coté que v. On applique le théorème de Borsuk-Ulam à l'application continue $(f_1, \cdots, f_n) : \mathbb{S}^n \to \mathbf{R}^n$ pour trouver un $v \in \mathbb{S}^n$, tel que $f_i(v) = -f_i(-v)$ pour chaque i. C'est équivalent à dire que l'hyperplan $v^\perp$ coupe chaque A_i en deux partie de même mesure.